10. 03. 2021

РЕШЕНИЕ В РАДИКАЛАХ УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

УДК 512. 62
Арефьев В. А.
Аннотация. Данная статья предназначена для специалистов с высшим техническим образованием, но доступна и для студентов. Применён метод С. Зайкова с некоторыми изменениями и дополнениями, которые сделали его применение значительно проще.
Ключевые слова. Уравнение пятой степени, резольвента, единица, корень.

SOLUTION IN RADIKALS TO AN EQUATION OF THE FIFTH DEGREE

V. Arefev
Abstract. This article is intended for specialists with a higher technical education, but it is presented quite accessible for students. The method of S. Zaikov was applied with some changes and additions, which made it much simpler and more complete.
Key words. Fifth degree equation, resolvent, unit, root.

I. История решения алгебраических уравнений

До **XVI** века умели решать только уравнения первой и второй степени. Итальянский учёный Лука Пачоли (**1445-1514**) в своей книге «Сумма арифметики» (**1494**) писал: «Для решения кубического уравнения искусством алгебры ещё не дан способ, как не дан способ квадратуры круга» [**1. с.15**]. Но прошло около сорока лет, и сперва Сципион дель Ферро (**1465-1526**), а затем Никколо Тарталья (**1499-1557**) нашли такой способ. Этот метод в **1545**-м году опубликовал Джероламо Кардано (**1501-1576**) в своей книге «Великое искусство». Он узнал метод у Тартальи, пообещав не публиковать его до публикации книги самого Тартальи. Кроме того, Кардано ознакомился с решением Ферро у его наследника. Ученик Кардано Лодовико Феррари (**1522-1565**) сумел свести решение уравнения четвёртой степени к решению вспомогательного уравнения третьей степени (резольвенте). В итоге Кардано опубликовал книгу с изложением обоих решений [**1, с.13-42**]. Он указал авторов решения, но обещание неразглашения нарушил. За это его многие осуждали, но многие и были благодарны. Его книгу можно считать первым серьёзным достижением европейской науки со времён древних греков.

Решение Феррари побудило ученых начать поиск решения уравнений пятой степени и выше. Но уравнение общего вида с буквенными коэффициентами им не поддавалось, хотя некоторые достижения были.

Франсуа Виет (**1540-1603**) вывел знаменитые «формулы Виета», связывающие коэффициенты уравнения с его корнями, что имело большое теоретическое и практическое значение. [**4, с. 159**].

Э.В. фон Чирнхаус (**1651-1708**) с помощью подстановок преобразовал общее уравнение так, что слагаемые второй, третьей и четвёртой степени исчезли. Уравнение стало проще, но решение так и не было получено.

Метод Чирнхауса стал основой для корня Бринга-Жирара или ультрарадикала, применяемого для численного решения уравнений.

Ж.Л.Лагранж (**1736-1813**) в своей работе «О решении численных уравнений» обратил внимание на симметричность формул Виета и на важную роль корня из единицы [**6, с. 7-8**]. Лагранж высказал предположение, что не все уравнения выше четвертой степени разрешимы в радикалах. Строгое доказательство этого факта и конкретные примеры таких уравнений дали Абель и Галуа лишь через полвека.

Quintic equation

Леонард Эйлер (**1707-1783**) предложил искать решение в виде суммы четырёх корней пятой степени (по аналогии со своим решением уравнения четвёртой степени) [**7, с. 775-786**]. Дальнейшие исследования показали, что предложение правильное, но недостаточное.

Паоло Руффини (**1785-1822**) дал доказательство невозможности решения в радикалах уравнений общего вида пятой степени и выше [**4, с.16**]. Но в его доказательстве есть несколько неточностей.

Полное доказательство дал норвежский математик Нильс Абель (**1802-1829**).

Современную теорию уравнений создал французский математик Эварист Галуа **(1811-1832).** Его работы стали основой высшей алгебры.

После Абеля и Галуа математика стала развиваться в другом направлении. Немецкий математик Ф.Г.М.Эйзенштейн (**1823-1852)** сформулировал знаменитый критерий неприводимости многочлена. «Неприводимое уравнение» вынудило учёных разработать комплексное исчисление. Было разработано и немало численных методов. И стали говорить и писать, что практическое значение даже формулы Кардано невелико, так как проще использовать численные методы. Однако, такой утилитарный подход не всегда является оптимальным. Численные методы оказались малопригодными для исследования динамики решения при вариации исходных параметров. [**3, с. 38**].

С середины девятнадцатого века быстро развивалась высшая математика и её применение.

Крупный советский ученый Н.Г.Чеботарёв (**1894-1947**) в своей книге «Основы теории Галуа» в **1934**-м году вывел формулы для получения коэффициентов уравнений пятой степени, решаемых в радикалах. Его формулы дают необходимое и достаточное условия для этого [**6, с. 128-129].** В книге приведен пример уравнения, неприводимого по критерию Эйзенштейна, но решаемого в радикалах: $\boldsymbol{x^5+15x+12=0}$. Но ни он сам, и никто другой за восемьдесят пять прошедших лет это уравнение решить не смогли.

Решение этого уравнения было найдено Сергеем Зайковым только в **2018-**м году [**2,** вся книга]. При этом он не ограничился одним этим уравнением, а нашёл метод решения полных уравнений пятой степени, решаемых в радикалах.

Метод решения, предложенный Зайковым, является весьма универсальным, однако при решении конкретных уравнений (даже с небольшими коэффициентами) он может приводить к значительным вычислительным трудностям, включая оперирование огромными коэффициентами в промежуточных формулах при получении точных решений в радикалах.

В настоящей работе предлагается модификация метода Зайкова, которая приводит к его существенному упрощению. Это позволяет предложить достаточно простую и универсальную методику решения уравнений пятой степени, решаемых в радикалах.

II. Метод С. Зайкова решения уравнения пятой степени

Зайков взял за основу приведённое, неполное уравнение пятой степени. Полное уравнение легко приводится к такому виду с помощью стандартной подстановки.

$$\boldsymbol{x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.} \tag{2.1}$$

Метод Зайкова применим к уравнениям метациклической группы Галуа. Остальные четыре группы либо не решаются в радикалах, либо решаются простыми методами. Рассмотрим его метод. (Ссылки на формулы из книги Зайкова даются в квадратных скобках). Корни уравнения **(2.1)** Зайков представил в виде формулы [**1.2.2**]. Напишем эту формулу в развёрнутом виде:

Quintic equation

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \\ x_2 &= pb_1 + p^2b_2 + p^3b_3 + p^4b_4, \\ x_3 &= p^2b_1 + b^4b_2 + pb_3 + p^3b_4, \\ x_4 &= p^3b_1 + pb_2 + p^4b_3 + p^2b_4, \\ x_5 &= p^4b_1 + p^3b_2 + p^2b_3 + pb_4, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – корни уравнения **(2.1)**, числа b, b_2, b_3, b_4– слагаемые действительного корня, p – первообразный корень пятой степени из единицы.

$$p = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 уравнения **(2.1)** выражаются через числа b_1, b_2, b_3, b_4:

$$a_3 = -5(b_1b_4 + b_2b_3),$$

$$a_2 = -5\left(b_1^2b_3 + b_2^2b_1 + b_3^2b_4 + b_4^2b_2\right),$$

$$a_1 = 5\left(b_1^2b_4^2 + b_2^2b_3^2 - b_1b_2b_3b_4 - b_1^3b_2 - b_2^3b_4 - b_3^3b_1 - b_4^3b_3\right),$$

$$a_0 = 5\left(b_1^3b_3b_4 + b_2^3b_1b_3 + b_3^3b_1b_4 + b_4^3b_1b_2\right) -$$

$$-5\left(b_1^2b_2^2b_4 + b_1^2b_3^2b_2 + b_3^2b_4^2b_1 + b_2^2b_4^2b_3\right) - (b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5).$$

Эти формулы Зайков разделил на части и получил четыре резольвенты: $V,\ W,\ Z,\ Q$.

$$\mathrm{V} = b_1b_2b_3b_4,$$

$$\mathrm{W} = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5,$$

$$\mathrm{Z} = b_1^5b_2b_3 + b_2^5b_1b_3 + b_3^5b_1b_4 + b_4^5b_2b_3,$$

$$\mathrm{Q} = b_1^3b_2^2b_3 + b_2^3b_4^2b_1 + b_3^3b_1^2b_4 + b_4^3b_3^2b_2.$$

Но этих резольвент недостаточно для решения уравнения **(2.1)**, поэтому в работе Зайкова используется также резольвента Артура Кэли (**1821-1895**):

$$\Theta = x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 + x_4x_5$$

(См., например, книгу Постникова, где она приведена для группы Галуа B_5' [**5, с. 150**]). Зайков доказал, что если резольвенту Кэли возвести в квадрат ($\Omega = \Theta^2$), то для Ω можно составить уравнение шестой степени [**1.3.3**], которое обязательно имеет целочисленный корень. А такой корень является делителем свободного члена и его можно подобрать.

$$\Omega^6 + d_5\Omega^5 + d_4\Omega^4 + d_3\Omega^3 + d_2\Omega^2 + d_1\Omega + d_0 = 0.$$

Зная значение резольвенты Кэли, можно, используя взаимосвязи резольвент, найти остальные резольвенты. Затем можно составить уравнение четвёртой степени с корнями $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ [**2.3.1**]:

$$y^4 - B_3y^3 + B_2y^2 - B_1y + B_0 = 0$$

Коэффициенты этого уравнения выражаются через резольвенты и коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 уравнения **(2.1)**. Решив уравнение, найдём числа b_1, b_2, b_3, b_4, подставив их в формулы **(2.2)**, получим полное решение основного уравнения **(2.1)**. В некоторых формулах знаменатели могут оказаться равными нулю, поэтому в книге Зайкова рассмотрены три особых случая, для которых выведены отдельные формулы.

III. Решение уравнения Чеботарёва

В книге Чеботарёва приведено уравнение пятой степени нормального вида (без $\boldsymbol{x^2, x^3, x^4}$). Лишь через восемьдесят пять лет после его опубликования решение нашел и привёл в своей книге Зайков.

$$\boldsymbol{x^5 + 15x + 12 = 0, \quad a_0 = 12, a_1 = 15, a_2 = a_3 = 0.} \tag{3.1}$$

Повторим решение Зайкова с некоторыми изменениями и дополнениями. Составим уравнение для квадрата резольвенты Кэли и определим его коэффициенты по формулам и таблицам [**с. 15–17**].

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{\Omega^6 + d_5\Omega^5 + d_4\Omega^4 + d_3\Omega^3 + d_2\Omega^2 + d_1\Omega + d_0 = 0,}\\ \boldsymbol{d_5 = -40a_1, d_4 = 880a_1^2, d_3 = -8960a_1^3, d_2 = 44800a_1^4,}\\ \boldsymbol{d_1 = -108544a_1^5 - 3200000a_0^4,\ d_0 = 102400a_1^6.}\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{d_5 = -600,\ d_4 = 198000,\ d_3 = -30240000,\ d_2 = 2268000000,}$$

$$\boldsymbol{d_1 = -148780800000,\ d_0 = 1166400000000 = 2^{12}\bullet 3^6\bullet 5^8.}$$

$$\boldsymbol{\Omega^6 - 600\Omega^5 + 198000\Omega^4 - 30240000\Omega^3 + 2268000000\Omega^2 - 148780800000\Omega + 1166400000000 = 0.}$$

Целочисленный корень оказался: $\boldsymbol{\Omega = 180}$**.** А значение резольвенты Кэли будет:

$$\boldsymbol{\Omega = \sqrt{\Theta} = \sqrt{180} = 5\sqrt{5}.} \tag{3.3}$$

Найдём резольвенты Зайкова по формулам, полученным из уравнений [**2.2.9-2.2.13**]:

$$\boldsymbol{V = -\frac{1}{500}\Omega^2, W = -\frac{a_0(a_1\ + 25V)}{a_1 + 125V}, Q = \frac{(a_0 + W)^2}{400V}, Z = \frac{Q}{20V}(a_0 + W).} \tag{3.4}$$

Получили все резольвенты: $\boldsymbol{\Theta = 6\sqrt{5},\ V = -\frac{9}{25},\ W = \frac{12}{2},\ Q = -\frac{36}{25},\ Z = \frac{72}{25}.}$

Составим уравнение четвёртой степени [**2.3.1**], корнями которого будут $\boldsymbol{b_1^5,\ b_2^5,\ b_3^5,\ b_4^5.}$

Коэффициенты рассчитаем по формулам [**2.3.6-2.3.9**]:

$$\boldsymbol{y^4 - B_3y^3 + B_2y^2 - B_1y + B_0 = 0,} \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{B_3 = W, \qquad B_2 = \frac{1}{5}a_1Q, \qquad B_1 = ZV^2, \qquad B_0 = V^5.}$$

$$\boldsymbol{B_3 = \frac{12}{5},\ B_2 = -\frac{108}{25},\ B_1 = \frac{5832}{15625},\ B_0 = -\frac{59049}{9765625}.}$$

Получили уравнение: $\boldsymbol{y^4 - \frac{12}{5}y^3 - \frac{108}{25}, y^2 - \frac{5832}{15625}y - \frac{59049}{9765625} = 0.}$ **(3.6)**

Из формул [**2.2.7-2.2.8**] мы имеем: $\boldsymbol{b_1b_4 = \frac{\Theta}{10\sqrt{5}},\ b_2b_3 = -\frac{\Theta}{10\sqrt{5}}.}$ **(3.7)**

$$\boldsymbol{b_1^5b_4^5 = (\frac{6\sqrt{5}}{10\sqrt{5}})^5 = \frac{243}{3125},\ \ b_2^5b_3^5 = (-\frac{6\sqrt{5}}{10\sqrt{5}})^5 = -\frac{243}{3125}.} \tag{3.8}$$

Зайков не рекомендует решать уравнения **(3.5)** обычными способами, так как выражения для корней получаются в виде, малопригодном для дальнейшего применения. Вместо этого он предлагает использовать алгоритм Евклида [с. **43-44**]. Составляются два квадратных уравнения, в которых коэффициенты D_1 и D_2 при первой степени являются неопределенными числами**,** а значения свободных членов находятся из формул **(3.8)**.

В результате уравнение **(3.6)** распадается на два квадратных уравнения:

$$y^2 - D_1 y + \frac{243}{3125} = 0, \tag{3.9}$$

$$y^2 - D_2 y - \frac{243}{3125} = 0. \tag{3.10}$$

Чтобы найти коэффициенты D_1 и D_2, в методе Зайкова уравнение **(3.9)** умножается на **(**y^2**)** и вычетается из уравнения **(3.6).** В результате получается кубическое уравнение. Затем уравнение **(3.9)** умножается на **(**y**)** и составляется разность двух полученных кубических уравнений, что позволяет получить два новых квадратных уравнения. Из этих уравнений получается уравнение первой степени, из которого и находится D_1. Затем, аналогичным образом, из уравнения **(3.10)** находится D_2. Данный метод представляется слишком громоздким, однако трудности, связанные с использованием метода Зайкова, этим не ограничиваются.

В методе Зайкова приходится принимать во внимание, что числа b_1 и b_2 могут принимать по пять различных значений, а b_3 и b_4 зависят от них, что даёт двадцать пять различных вариантов. Чтобы их сократить до пяти, он нашёл зависимость между b_1 и b_3 [**с. 47**], введя новую величину $u = b_1^2 b_3$**.** Автор составил для **(**u**)** два уравнения четвёртой степени, в коэффициенты которых кроме чисел входят b_1^5 и u^5, и снова применяется алгоритм Евклида [с**. 46-48**]. Из уравнений четвёртой степени строятся два кубических уравнения, затем два квадратных уравнения, а потом уравнение первой степени. А уже из него находится **(**u**)**. Это очень сложный расчёт. В процессе решения уравнения числа доходили до квинтиллионов, а степени до тридцати пяти!

Удивительно, но в результате получается простое решение: $u = \frac{3}{5} - \frac{6}{25}\sqrt{10}$, которое позволяет получить следующие явные выражения для величин b_1, b_2, b_3, b_4:

$$b_1 = \left(5 - \frac{5\sqrt{10}}{3}\right) b_2^3,\ \ b_3 = \left(\frac{125}{9} - \frac{40\sqrt{10}}{9}\right) b_2^4,\ \ b_4 = \left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{5}{3}\right) b_2^2, \text{ где } b_2 = \sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}}.$$

Из приведенного краткого изложения второй части метода Зайкова следует, что эта часть является чрезмерно сложной и может существенно затруднять на практике получение окончательных аналитических выражений для корней уравнения пятой степени даже в тех случаях, когда эти выражения не являются громоздкими. В то же время можно предложить значительно более простой и надежный способ получения тех же самых результатов. Действительно, перемножим уравнения **(3.9)** и **(3.10)**, обозначив $F = \left(\frac{\theta}{10\sqrt{5}}\right)^5 = \frac{243}{3125}$.

Затем приравняем коэффициенты при равных степенях полученного уравнения и **(3.6)**:

$$\left(y^2 - D_{1y} + F\right)\left(y^2 - D_{2y} - F\right) =$$

$$= y^4 - (D_1 + D_2)y^3 + (F - F + D_1 D_2)y^2 + F(D_1 - D_2)y - F^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$D_1 + D_2 = \frac{12}{5},\quad D_1 D_2 = -\frac{108}{25},\ -F^2 = -\frac{59049}{976525},$$

Quintic equation

$$D_1 - D_2 = \frac{1}{\mathrm{F}}\left(-\frac{5832}{15625}\right) = \frac{3125}{243}\left(-\frac{5832}{15625}\right) = -\frac{24}{5},$$

Из первой и четвёртой формул получим: $D_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5} - \frac{24}{5}\right) = -\frac{6}{5}$, $D_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5} + \frac{24}{5}\right) = \frac{18}{5}$,

$$y^2 + \frac{6}{5}y + \frac{243}{3125} = 0, \qquad y^2 - \frac{18}{5}y - \frac{243}{3125} = 0.$$

Решение этих уравнений будет:

$$(b_1^5, b_4^5) = (y_1, y_2) = -\frac{3}{5} \pm \frac{21}{125}\sqrt{10}, \quad (b_2^5, b_3^5) = (y_3, y_4) = \frac{9}{5} \pm \frac{72}{125}\sqrt{10}.$$

Это корни уравнения четвёртой степени **(3.6)**, причем не имеет значения какому **(*b*)** соответствует какой **(*y*)**. Примем:

$$b_1^5 = -\frac{3}{5} + \frac{21}{125}\sqrt{10}, \ \ b_2^5 = \frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}, \ \ b_3^5 = \frac{9}{5} - \frac{72}{125}\sqrt{10}. \ \ b_4^5 = -\frac{3}{5} - \frac{21}{125}\sqrt{10},$$

$$b_1 = \sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}}, \ b_2 = \sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}}, \ b_3 = \sqrt[5]{\frac{9}{5} - \frac{72\sqrt{10}}{125}}, \ b_4 = \sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}}, \qquad \textbf{(3.12)}$$

Получим действительный корень x_1 в радикалах:

$$x_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{\frac{9}{5} - \frac{72\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}}.$$

$$x_1 = -585380917 + 1,293531547 - 0,463846437 - 1,024973624 = -0,780669431.$$

Для получения остальных корней, подставим (b_1, b_2, b_3, b_4) из **(3.12)** в **(2.2)**:

$$x_2 = p\sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} + p^2\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^3\sqrt[5]{\frac{9}{5} - \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^4\sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}},$$

$$x_3 = p^2\sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} + p^4\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p\sqrt[5]{\frac{9}{5} - \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^3\sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}},$$

$$x_4 = p^3\sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} + p\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^4\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^2\sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}},$$

$$x_5 = p^4\sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} + p^3\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p^2\sqrt[5]{\frac{9}{2} - \frac{72\sqrt{10}}{125}} + p\sqrt[5]{-\frac{3}{5} - \frac{21\sqrt{10}}{125}},$$

Таким образом мы получили явные выражения для всех пяти корней уравнения Чеботарёва в радикалах**.** Несложно показать, что эти результаты полностью совпадают с результатами Зайкова. Для этого достаточно продемонстрировать, совпадение величин b_1, b_2, b_3, b_4, которые определяют корни уравнения. Проверим это на примере b_1 **(3.12)**:

$$b_1 = \sqrt[5]{-\frac{3}{5} + \frac{21\sqrt{10}}{125}} = -0,585380917, \quad b_1 = \left(5 - \frac{5\sqrt{10}}{3}\right)\left(\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72\sqrt{10}}{125}}\right)^3 = -0.585380917,$$

То же самое можно показать и для других коэффициентов. Это означает, что применение алгоритма Евклида для решения уравнения не требуется.

IV. Методика решения уравнения пятой степени

По формулам Чеботарёва составим уравнение нормального вида (без x^2, x^3, x^4).

$$a_1 = \frac{3125\lambda\mu^4}{(\lambda-1)^4(\lambda^2-6\lambda+25)}, \quad a_0 = a_1\mu.$$

Параметры **λ** и **μ** должны быть рациональными числами. Вначале надо выбрать **λ**, затем выбрать параметр **μ** таким, чтобы уравнение получилось не слишком сложным. Пример:

$$\left(\lambda = -5, \mu = \frac{12}{5}\right) \to a_1 = -5, a_0 = -12.$$

$$x^5 - 5x - 12 = 0. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Составим уравнение квадрата резольвенты Кэли и найдём коэффициенты по формулам **(3.2):**

$$\Omega^6 + d_5\Omega^5 + d_4\Omega^4 + d_3\Omega^3 + d_2\Omega^2 + d_1\Omega + d_0 = 0.$$

$$d_5 = -40a_1, \quad d_4 = 880a_1^2, \quad d_3 = -8960a_1^3, \quad d_2 = 44800a_1^4,$$

$$d_1 = -108544a_1^5 - 3200000a_0^4, \quad d_0 = 102400a_1^6.$$

$$d_5 = 200, \quad d_4 = 22000, \quad d_3 = 1120000, \quad d_2 = 28000000, d_1 = 66016000000,$$

$$d_0 = 1600000000.$$

Корень подобрался легко: $\Omega = 100; \Theta = \sqrt{\Omega} = 10.$ **(4.2)**

Найдём резольвенты Зайкова и вспомогательные величины E, F по формулам (**3.4**)**:**

$$V = -\frac{\Theta^2}{500}, W = -\frac{a_0(a_1+25V)}{a_1+125V}, Q = \frac{(a_0+W)^2}{400V}, Z = \frac{Q}{20V}(a_0+W), F = \left(\frac{\Theta}{10\sqrt{5}}\right)^5, E = \frac{ZV^2}{F}. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Получили: $\Theta = 10, \quad V = -\frac{1}{5}, \quad W = 4, \quad Q = -\frac{4}{5}, \quad Z = -\frac{8}{5}, \quad F = \frac{\sqrt{5}}{125}, \quad E = -\frac{8\sqrt{5}}{5}.$

Корни уравнения пятой степени даются общими формулами **(2.1)** и определяются величинами b_1, b_2, b_3, b_4**.** Составим уравнение четвёртой степени, корнями которого будут $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$**.** Коэффициенты рассчитаем по формулам [**3.6**]:

$$y^4 - B_3y^3 + B_2y^2 - B_1y + B_0 = 0,$$

$$B_3 = W = 4, \qquad B_2 = \frac{1}{5}a_1Q = \frac{4}{5}, \qquad B_1 = ZV^2 = -\frac{8}{125}, \qquad B_0 = V^5 = \frac{1}{3125}.$$

Это уравнение распадается на два квадратных уравнения

$$y^2 - D_1y + F = 0, \qquad y^2 - D_2y - F = 0,$$

где коэффициенты D_1, D_2 определяются следующими выражениями:

$$D_1 = \frac{1}{2}(W-E) = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}, \qquad D_2 = \frac{1}{2}(W+E) = 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Обозначим $T = \frac{W-E}{4} = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, \; H = \frac{W+E}{4} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Quintic equation

Подставив $\boldsymbol{D_1, D_2, F, T, H}$ в квадратные уравнения, получим их решения в общем виде:

$$b_1^5 = y_1 = T + \sqrt{T^2 - F},\ b_2^5 = y_3 = H + \sqrt{H^2 - F}.$$

$\boldsymbol{b_3^5}$ и $\boldsymbol{b_4^5}$ отличаются только знаками перед корнями. Получим:

$$b_1^5 = y_1 = \left(1 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \sqrt{(1 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5})^2 - \tfrac{\sqrt{5}}{125}},\ \ b_2^5 = y_3 = \left(1 - \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \sqrt{(1 - \tfrac{2\sqrt{5}}{5})^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{125}}.$$

$$b_3^5 = y_4 = \left(1 - \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \sqrt{\left(1 - \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{125}},\ \ b_4^5 = y_2 = \left(1 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \sqrt{\left(1 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \tfrac{\sqrt{5}}{125}}.$$

$$b_1 = 1{,}304947812, b_2 = 0{,}772985617, b_3 = -0{,}578553578, b_4 = 0{,}342706115.$$

Теперь можно получить общее выражение для действительного корня:

$$x_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \sqrt[5]{y_1} + \sqrt[5]{y_3} + \sqrt[5]{y_4} + \sqrt[5]{y_2}.$$

$$x_1 = \sqrt[5]{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{125}}} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}}{125}}} +$$

$$+ \sqrt[5]{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}}{125}}} + \sqrt[5]{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{125}}}.$$

$$x_1 = 1{,}842085958.$$

Все пять корней определяются формулами (**2.2**):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \\ x_2 &= pb_1 + p^2b_2 + p^3b_3 + p^4b_4, \\ x_3 &= p^2b_1 + p^4b_2 + pb_3 + p^3b_4, \\ x_4 &= p^3b_1 + pb_2 + p^4b_3 + p^2b_4, \\ x_5 &= p^4b_1 + p^3b_2 + p^2b_3 + pb_4. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Эти формулы преобразуем в более удобный вид для численного расчёта. Заменим $(\boldsymbol{p})$ и его степени на их значения, используя синусы и косинусы соответствующих углов.

$$p = \cos\varphi + i\sin\varphi, p^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi, p^3 = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi, p^4 = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

$$\cos\varphi = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 2\varphi = \tfrac{-\sqrt{5}-1}{4}, \sin\varphi = \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \sin 2\varphi = \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

где $$\varphi = \tfrac{2\pi}{5} = 72°,\ 2\varphi = \tfrac{4\pi}{5} = 144°.$$

Подставим тригонометрические значения $(\boldsymbol{p})$ и его степени в решени**е (4.7)** и получим комплексные корни в обычном алгебраическом виде:

$$\left.\begin{aligned} &x_2 = A + Bi,\ x_5 = A - Bi,\ x_3 = C + Di,\ x_4 = C - Di \\ &A = (b_1 + b_4)\cos 72° + (b_2 + b_3)\cos 144°, \\ &C = (b_1 + b_4)\cos 144° + (b_2 + b_3)\cos 72°, \\ &B = (b_1 - b_4)\sin 72° + (b_2 - b_3)\sin 144° \\ &D = (b_1 - b_4)\sin 144° - (b_2 - b_3)\sin 72° \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(4.8)}$$

Подставив ранее найденные числа **(*b*)** в **(4.8)**, получаем решение в численном виде:
$(x_2, x_5) = 0,351854567 \pm 1,709561051i, (x_3, x_4) = -1,272897216 \pm 0,719798673i.$

Найдя резольвенты и дополнительные величины можно (даже не обращаясь к уравнению четвёртой степени) сразу получить действительный корень по формуле:

$$x_1 = \sqrt[5]{T + \sqrt{T^2 - F}} + \sqrt[5]{H + \sqrt{H^2 + F}} + \sqrt[5]{H - \sqrt{H^2 + F}} + \sqrt[5]{T - \sqrt{T^2 - F}}.$$

Проверку действительного и комплексных корней проведём по формулам:

$$\left.\begin{array}{c} x_1^5 + a_1 x_1 + a_0 = 0, \\ A(A^4 - A^2B^2 + 5B^4 + a_1) + a_0 = 0, \\ (B^4 - 10A^2B^2 + 5A^4 + a_1) = 0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Проверка на калькуляторе дала небольшую погрешность, и это погрешность калькулятора.

V. Решение полного уравнения пятой степени

Составим полное уравнение, решаемое в радикалах. Корни уравнения будут известны, но нам важна методика решения.

$t^5 - 5t^4 + 30t^3 - 50t^2 + 55t - 21 = 0.$ Подставим $t = x + 1.$

$$(x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 30(x+1)^3 - 50(x+1)^2 + 55(x+1) - 21 = 0,$$

$$x^5 + 20x^3 + 20x^2 + 30x + 10 = 0,$$

Формулы, использованные ранее, уже не годятся, т.к. появились a_2 и a_3. По формулам и таблицам [**с. 15-17**] найдём коэффициенты уравнения квадрата резольвенты Кэли:

$$d_5 = -6a_3^2 - 40a_1 = -3600,$$
$$d_4 = 15a_3^4 + 104a_1a_3^2 + 32a_2^2a_3 - 800a_0a_2 + 880a_1^2 = 28248000,$$

Из–за большой длины остальных формул (до сорока пяти слагаемых) приведем только окончательные значения.

$$d_3 = 21625600000,\ d_2 = -188416000000,\ d_1 = 55158545920000,\ d_0 = 0.$$

Свбодный член оказался равен нулю. Напишем уравнение шестой степени.

$$\Omega^6 - 3600\Omega^5 + 28248000\Omega^4 - 2162560000\Omega^3 -$$
$$-188416000000\Omega^2 + 55158545920000\Omega + 0 = 0.$$
$$\Omega = 0, \Theta = 0.$$

Найдём резольвенты по формулам [**2.2.7-2.2.11**]. $a_0 = 10, a_1 = 30, a_2 = 20, a_3 = 20.$

$$V = \frac{1}{100}a_3^2 - \frac{1}{500}\Theta^2 = \frac{1}{100}a_5^2 = \frac{1}{100}20^2 = 4.$$

Quintic equation

Это особый случай **№1,** который рассмотрен Зайковым. $\boldsymbol{W}$ найдём из уравнения **[2.2.11],** немного его перегруппировав. $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Z}$ найдём по формулам [**с. 32-33**].

$$100(a_3^2 - 100V)Q + 25(W^2 + 2Wa_0 + a_0^2) + (100V - a_3^2)a_2^2 = 0,$$

$$100(\ 0\ )Q + 25(W + a_0)^2 + (\ 0\ )a_2^2 = 0,$$

$$W = -a_0 = -10,$$

$$Q = \frac{1}{50}a_1a_3 - \frac{1}{1000}a_3^3 = 4, \qquad Z = \frac{1}{10}a_0a_3 = 20.$$

$$y^4 - B_3y^3 + B_2y^2 - B_1y + B_0 = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения найдём по формулам [**2.3.6-2.3.9**]:

$$B_0 = V^5 = 4^5 = 1024, \qquad B_3 = W = -10,$$

$$B_2 = \frac{1}{250}a_0a_2a_3 - \frac{1}{125}a_1a_2^2 + \frac{1}{5}a_1Q + \frac{1}{1250}a_2^2a_3^2 - \frac{2}{25}a_2^2V + \frac{1}{250}a_2a_3W + \frac{1}{5}a_2Z -$$

$$-\tfrac{1}{25}a_3^2Q - -\tfrac{1}{3125}a_3^5 + \tfrac{1}{25}a_3^2V - a_3V^2 = -120,$$

$$B_1 = -\tfrac{1}{625}Za_3^4 + \tfrac{1}{125}a_3^3VW - \tfrac{3}{25}a_3^2VZ - \tfrac{2}{5}WV^2 + ZV^2 = 320.$$

Мы получили уравнение четвёртой степени**:**

$$y^4 + 10y^3 - 120y^2 - 320y + 1024 = 0,$$

Из формул **(2.2.7-2.2.8)** найдём:

$$b_1b_4 = \frac{\Theta - \alpha_3\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} = \frac{0 - 20\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} = -2,\ \ b_1^5b_4^5 = -32 = F,\ \ b_2b_3 = -2,\ \ b_2^5b_3^5 = -32 = F,$$

Уравнение четвертой степени распадается на два квадратных:

$$y^2 - D_1y + F = 0, \qquad y^2 - D_2y + F = 0,$$

$$(y^2 - D_1y + F)(y^2 - D_2y + F) =$$

$$y^4 - (D_1 + D_2)y^3 + (-32 - 32 + D_1D_2)y^2 + (32D_1 + 32D_2)y + 32 * 32 = 0,$$

$$D_1 + D_2 = -10,\ \ D_1D_2 - 2 * 32 = -120,\ \ D_1D_2 = -56,$$

По формулам Виета составим квадратное уравнение:

$$D^2 + 10D - 56 = 0,$$

$D_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 56} = -5 \pm 9$; Примем: $D_1 = -14, D_2 = 4$; Получим:

$y^2 + 14y - 32 = 0,\ \ y_{1,2} = -7 \pm 9;\ \ y^2 - 4y - 32 = 0,\ \ y_{3,4} = 2 \pm 6$; Примем:

$$b_1^5 = y_1 = 2, \qquad b_4^5 = y_2 = -16, \qquad b_2^5 = y_3 = -4, \qquad b_3^5 = y_4 = 8,$$

$b_1 = \sqrt[5]{2},\ b_2 = \sqrt[5]{-4},\ b_3 = \sqrt[5]{8},\ b_4 = \sqrt[5]{-16},$ Получим решение:

$$x_1 = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{-4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{-16},$$

$$x_2 = p\,\sqrt[5]{2} + p^2\,\sqrt[5]{-4} + p^3\,\sqrt[5]{8} + p^4\,\sqrt[5]{-16},$$

$$x_3 = p^2\sqrt[5]{2} + p^4\sqrt[5]{-4} + p\sqrt[5]{8} + p^3\sqrt[5]{-16},$$
$$x_4 = p^3\sqrt[5]{2} + p\sqrt[5]{-4} + p^4\sqrt[5]{8} + p^2\sqrt[5]{-16},$$
$$x_5 = p^4\sqrt[5]{2} + p^3\sqrt[5]{-4} + p^2\sqrt[5]{8} + p\sqrt[5]{-16},$$

Или в обычном комплексном виде:

$$x_{2,5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{-16}\right) + \frac{-\sqrt{5}-1}{4}\left(\sqrt[5]{-4} + \sqrt[5]{8}\right) \pm$$
$$\pm i\left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\left(\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{-16}\right) + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\left(\sqrt[5]{-4} - \sqrt[5]{8}\right)\right],$$
$$x_{3,4} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}\left(\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{-16}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\sqrt[5]{-4} + \sqrt[5]{8}\right) \pm$$
$$\pm i\left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\left(\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{-16}\right) - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\left(\sqrt[5]{-4} - \sqrt[5]{-8}\right)\right],$$

И мы получили решение полного уравнения в радикалах.
Подсчитав все корни в численном виде и определив $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, мы можем сделать проверку решения по тем же формулам (**4.9**), что и в предыдущем примере.
А решение полного уравнения найдём по формуле: $t = x + 1$.

Заключение

В настоящей работе показано, что модификация и упрощение метода Зайкова позволяет построить чёткий алгоритм решения уравнений пятой степени, решаемых в радикалах.

$$x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

(В уравнениях нормального вида $a_3 = a_2 = 0$).

Коэффициенты определяются $d_5, d_4, d_3, d_2, d_1, d_0$ с помощью соответствующих формул и таблиц из книги Зайкова. Затем составляется уравнение для квадрата резольвенты Кэли:

$$\Omega^6 + d_5\Omega^5 + d_4\Omega^4 + d_3\Omega^3 + d_2\Omega^2 + d_1\Omega + d_0 = 0.$$

Целочисленный корень этого уравнения находится методом подбора. Определяется значение квадрата резольвенты Кэли. Затем по формулам Зайкова рассчитываются резольвенты Θ, V, W, Q, Z. По ним находятся коэффициенты уравнения четвёртой степени, которое решается разложением на два квадратных. Они нам дадут числа $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$. Затем находятся числа (b)**,** которые определяют корни уравнения пятой степени согласно формулам **(2.1)**

Модифицированный алгоритм является достаточно простым и позволяет самостоятельно решать уравнения пятой степени не только специалистам, имеющим инженерное или естественнонаучное образование, но даже студентам младших курсов.

Quintic equation

1 Список литературы

1. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. **МЦМНО НМУ**: **2001. – 420 с.**
2. Зайков С.Ю. Как решаются в радикалах алгебраические уравнения пятой степени. Томск/ Типография Демос, **2018. – 56 с.**
3. Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения. СПбГУ. **2002. – 72 с.**
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Наука. **1968. – 430 с.**
5. Постников М. М. Теория Галуа. Физматгиз. **1963 .– 220 с.**
6. Чеботарёв Н. Г. Основы теории Галуа. Ч. **1**. Ленинград. ГТТИ. **1934. – 224 с.**
7. Эйлер Леонард. Универсальная арифметика. Том **2**. СПб.: Имп. АН. **1769. – 586 с.**